Лабораторный практикум

Постановка задачи

$$c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda\left(T\right)\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\lambda(t)\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) - q\left(T\left(r,\phi\right)\right)$$

Необходимо найти:

$$T\left(r,\phi\right)$$

Начальные условия:

$$r = R, \qquad -\lambda\tfrac{\partial T}{\partial \lambda} = F_p(\phi, t)$$

$$r = R_1, \qquad -\lambda\tfrac{\partial T}{\partial \lambda} = \alpha\left(T - T_{oc}\right)$$

$$\phi = 0, \qquad \tfrac{\partial T}{\partial \phi} = 0$$

$$\phi = \pi, \qquad \tfrac{\partial T}{\partial \phi} = 0$$

$$t = 0, \qquad T\left(r,\phi,0\right) = T_{\text{нач}}\left(r,\phi\right) = T_o$$

Получение разностной схемы

Введм сетку:

$$\hat{T}_{i,j},\ \hat{T}_{i+1,j},\ \hat{T}_{i-1,j},\ \hat{T}_{i,j+1},\ \hat{T}_{i,j-1}$$

От координаты r нужно перейти к координате x для создания квазиравномерной сетки:
Переход к безразмерной величине:

$$z = \frac{r}{R_1}$$

$$z = 1 + \frac{1}{a}\text{arctg}\left(\left(x-1\right)y_m\right),$$

где

$$a = \frac{\frac{\pi}{2} - \delta}{1 - \frac{R}{R_1}}, \quad y_m = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right), \quad , x = 0, \ldots, 1$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y_m}{a\left(1+(x-1)^2 y_m^2\right)} \qquad \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{a}{y_m}\left(1+(x-1)^2 y_m^2\right)$$

$$\int_t^{t+\tau} \mathrm{d}t \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} z \frac{\mathrm{d}x}{\tilde{p}} \int_{\phi_{j-1/2}}^{\phi_{j+1/2}} z \mathrm{d}\phi (\cdot)$$

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} z \frac{\mathrm{d}x}{\tilde{p}} \int_{\phi_{j-1/2}}^{\phi_{j+1/2}} z \mathrm{d}\phi \left(\hat{c}\left(\hat{T}-T\right)\right) \approx$$

$$\approx \frac{z_i^2}{\tilde{p}} h_x h_\phi \hat{c}_{ji} \left(\hat{y}_{ji} - y_{ji}\right); \quad y_{ji} \approx T(r_i, \phi_j) = T_{ji}$$

И далее можно получить разностную схему. Её нужно проверять на апроксимацию. Невязка:

$$Au = f \to A_h y = \phi, \qquad \psi = \phi - A_h u$$

Второе слагаемое:

$$\hat{F}_{rj,i+1/2} = \frac{\hat{\lambda}_{j,i+1/2}}{R_1} \cdot \frac{\hat{y}_{ji} - \hat{y}_{j,i+1}}{h_r} \tilde{p}_i$$

$$\hat{F}_{rj,i-1/2} = \frac{\hat{\lambda}_{j,i-1/2}}{R_1} \cdot \frac{\hat{y}_{ji-1} - \hat{y}_{j,i}}{h_x} \tilde{p}_i$$

$$\hat{y} = \hat{y}\,(t+\tau)$$

Локально-одномерный метод

$$A_i y_{j,i+1} - B_i y_{j,i} + C_{j,i+1} = -F_j \qquad (1)$$

$$a_j y_{j-1,i} - b_j y_{j,i} + c_j y_{j+1,i} = -f_i \qquad (2)$$

Решается *методом прогонки*, перебирая значения по j для (1) и для i — урванение (2) .